Théorème de Lévy, Central limite et applications | Leçons : 244, 250, 261, 262, 266

Théorème de Lévy : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ où $\phi_X(t) = E(e^{itX})$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_t : x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée donc $E(f_t(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f_t(X))$

D'où $\phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X(t)$

$\boxed{1}$ Soit $f \in S(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que f est $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide. Par bijectivité de la transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R})$, il existe $g \in S(\mathbb{R})$ telle que $f = \hat{g}$

D'où $$E(f(X_n)) = E\left(\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-itX_n} dt\right) = \int_{\mathbb{R}} E(e^{-itX_n}) g(t) dt$$

D'après le théorème de Fubini.

Par ailleurs on a • $E(e^{-itX_n}) = \phi_{X_n}(-t) \to \phi_X(-t) = E(e^{-itX})$

et • $|E(e^{-itX_n}) g(t)| \leq |g(t)|$ car $g \in S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ d'où $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f(X))$

par théorème de convergence dominée

$\mathcal{C}^\infty \subset S(\mathbb{R}) \subset L^p$

$\mathcal{C}_c \subset \mathcal{C}_c^0 \subset L^p$

$\boxed{2}$ Soit f continue à support compact, soit $\varepsilon > 0$. ~~par densité de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$~~

On a donc l'existence de h $\mathcal{C}^\infty$ à ~~support compact~~ décroissance rapide telle que $\|f-h\| \leq \varepsilon$. Alors

Le résultat est vrai dans $S(\mathbb{R})$ donc dans $\mathcal{C}_c$ qui est dense dans $\mathcal{C}_c^0$ d'où $h \in \mathcal{C}_c$

$$\begin{aligned}|E(f(X_n)) - E(f(X))| &\leq |E(f(X_n)) - E(h(X_n))| + |E(h(X_n)) - E(h(X))| + |E(f(X)) - E(h(X))| \\ &\leq 2\varepsilon + |E(h(X_n)) - E(h(X))| \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

D'où $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f(X))$ où f est $\mathcal{C}^0$ à support compact donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$

$\square$

Théorème Central limite : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d d'espérance m et de variance σ^2.

Alors $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ où $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$

Preuve :

D'après le théorème de Paul-Lévy pour montrer que $Z_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

on montre que $\phi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Quitte à centrer et réduire c'est-à-dire à remplacer X_n par $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$ on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$

Par indépendance des X_k on a pour $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)$$

$$= E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right)$$

indépendance

$$= \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{\frac{itX_k}{\sqrt{n}}}\right)$$

identiquement distribuée

$$= \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

X_1 admet un moment d'ordre 2, sa fonction caractéristique est de classe C^2 d'où par formule de Taylor :

$$\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi_{X_1}(0) + \phi_{X_1}'(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \phi_{X_1}''(0)\frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\phi_{X_1}(0) = 1$, $\phi_{X_1}'(0) = iE(X_1) = 0$, $\phi_{X_1}''(0) = -E(X_1^2) = -\sigma^2 = -1$

$$\text{D'où } \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{D'où } \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$\square$

De l'intégration aux probas, Garet-Kurtzmann → Lévy
40 devs, Bernis
→ TCL

COMPLEMENT

- La transformée de Fourier $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est bijective en effet :

  - Soit $f \in S(\mathbb{R})$, par thm de dérivation sous l'intégrale $\mathcal{F}(f)$ est C^∞ et par des IPP on a $\mathcal{F}(f)^{(n)}(y) = \mathcal{F}\left(x \mapsto (-2i\pi x)^k f(x)\right)(y) = o\left(\frac{1}{|y|^n}\right)$

    Donc $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R})$

    en particulier $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ d'où par inversion de Fourier on a

    $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$

    Donc $\forall g \in S(\mathbb{R}),\ g = \mathcal{F}(f)$ avec $f(x) = \mathcal{F}(g)(-x)$

    Donc $\mathcal{F}(S(\mathbb{R})) = S(\mathbb{R})$ d'où $\mathcal{F}$ surjective

  - $\mathcal{F}$ est linéaire, soit $f \in \ker \mathcal{F}$ on a $\mathcal{F}(f) = 0 \in L^1(\mathbb{R})$

    donc par thm d'inversion $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(0) = 0$ d'où $\mathcal{F}$ injective

- ~~Savoir que C_c^∞ est dense dans $S(\mathbb{R})$, par les approximations de l'unité.~~
- On a bien $C_c^\infty \subset S(\mathbb{R})$ et $C_c \subset C_c^0$ on a de plus la densité (admise?)